



ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI
SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO
Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

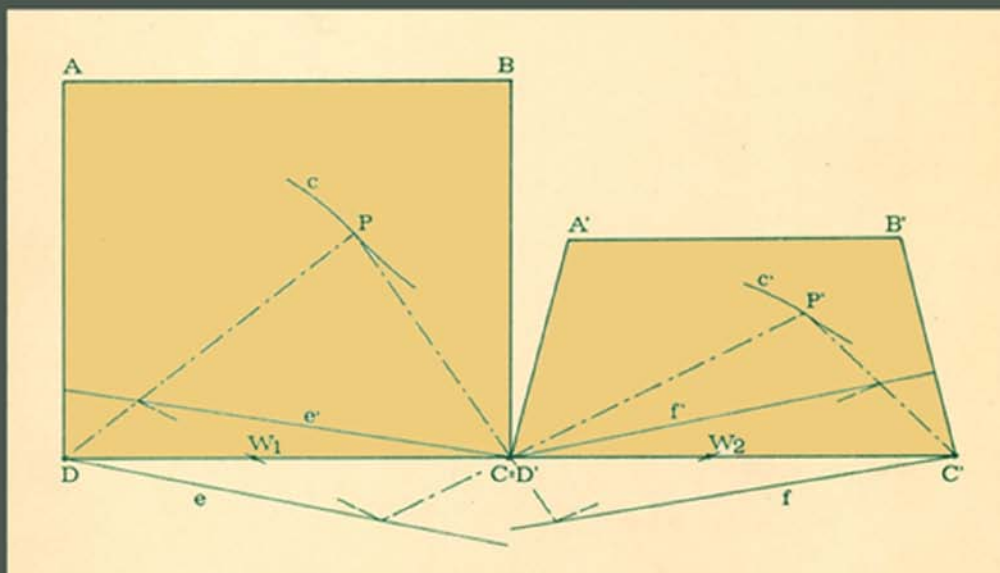
INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF
SPACE REPRESENTATION SCIENCES
Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

Palermo, Italia

Università degli Studi di Palermo

Giuseppe Maria Catalano

PROIETTIVITA' TRA IMMAGINI OROGRAFICHE



1988

Presentazione

Le imprevedibili intuizioni dell'ing. Catalano sorprendono la mia esperienza e segnano tappe di rilievo apprezzabili nello sviluppo della teoria-pratica che costituisce la premessa del linguaggio scientifico della rappresentazione geometrica.

La monografia sulle immagini orografiche si distacca con contenuto originale dal filone di ricerca grafica espressiva dei terreni a curve di livello.

il contributo che ne deriva può essere principalmente accolto da quanti, studiosi ed utenti, rimproverano la irrealistica configurazione a cilindroidi sovrapposti, di altezza unitaria, fin qui trattati.

Il suolo è visto come un modello realistico, arricchito da curve di livello; la figurazione relativa è ricavata per trasformazione proiettiva di notevole snellezza che fa convergere rapidamente alla immagine prospettica.

Io resto sostenitore, sotto certi aspetti, del sistema a balze, perché riscontro una versatilità comunicativa anche in ogni porzione della immagine stessa; devo però convenire sulla validità dello sforzo dell'ing. Catalano di cimentarsi con merito e risultato significativo sulla via di una idealizzazione meno artificiosa del trattamento superficiale nella rappresentazione grafica del tridimensionale.

Michele Inzerillo

Introduzione

Rappresentare in proiezione prospettica vaste superfici orografiche presuppone anzitutto la scelta di un punto di vista particolarmente alto, dovendo la visione abbracciare il più possibile i corrugamenti talvolta particolarmente accentuati presentati dai rilievi orografici.

E' consigliabile inoltre, come in qualsiasi rappresentazione prospettica, che tale punto di vista sia anche sufficientemente lontano dal quadro, in modo che non si crei un'immagine spiaccevolmente aberrata e ricca di inganni visivi, in definitiva inutilizzabile.

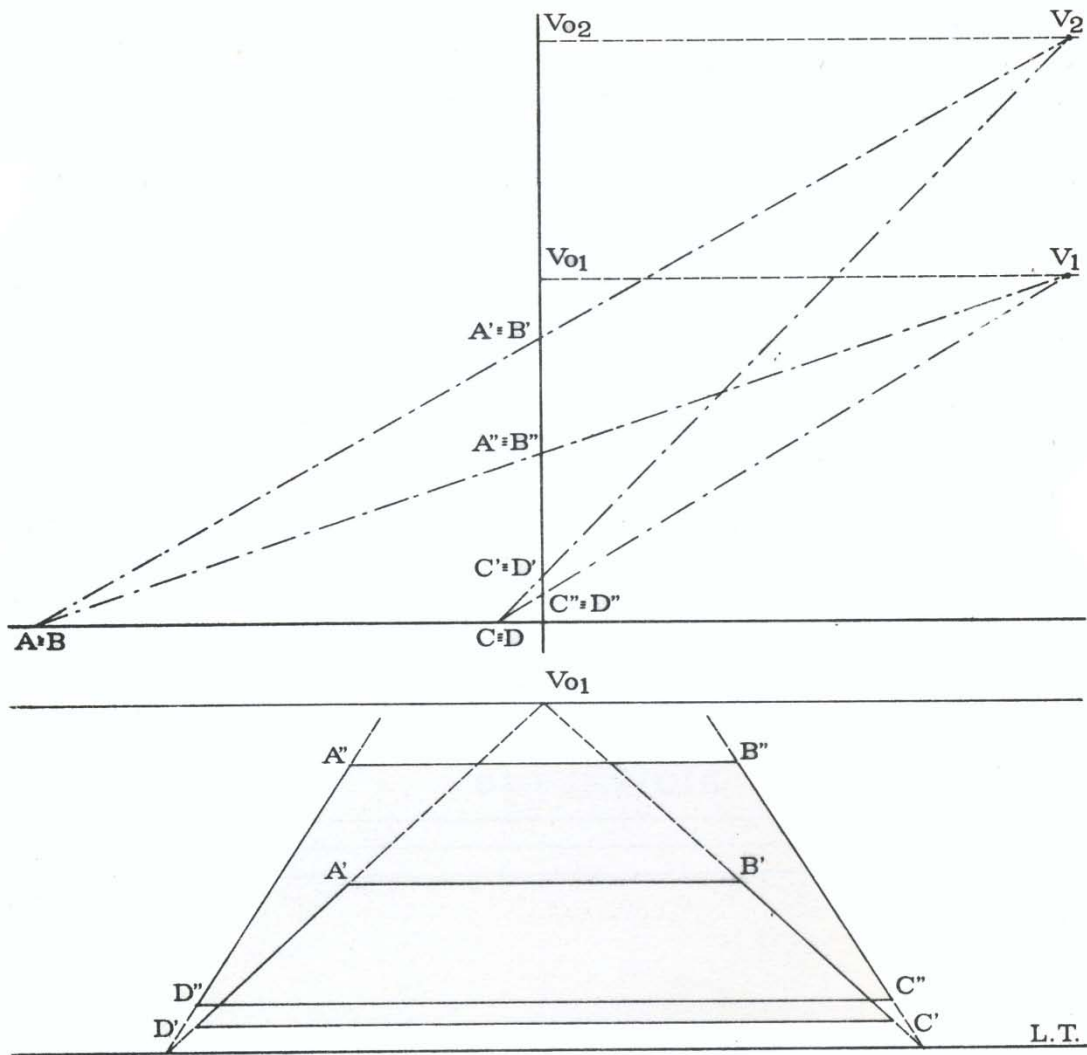
Tuttavia l'innalzamento del punto di vista V dalla posizione V_1 alla posizione V_2 (Fig. 1), implica un innalzamento di V_o , punto di fuga delle ortogonali al quadro, da V_{O_1} a V_{O_1} , e cioè un trasporto della linea d'orizzonte fuori foglio.

D'altra parte anche l'allontanamento del punto di vista dalla posizione V_3 alla V_4 (Fig. 2), rende certamente difficile o impossibile l'esecuzione di tutte quelle operazioni legate al ribaltamento di V sul quadro, ricadendo tale elemento fuori foglio.

Il metodo che si propone lega l'immagine planimetrica del rilievo orografico a quella prospettica, senza far uso di V e di V_o , attraverso un processo proiettivo semplice e compatto, che permette, tra l'altro, di accostare le due immagini senza sovrapposizioni.

8

Si è voluto trattare successivamente l'inserimento dei principali enti geometrici in tale rappresentazione, curando particolarmente la compenetrazione di essi col terreno, avviando così una ricerca che avrà certamente tra breve notevoli sviluppi.



F.1

SUPERFICIE OROGRAFICA

Superficie orografica

Assegnate tre coppie di rette corrispondenti $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$, appartenenti a due fasci proiettivi di centri K_1 e K_2 possiamo, come è noto, instaurare la relativa corrispondenza secondo i due fasci con due qualsiasi rette r_1 e r_2 contenenti il punto O appartenente a due qualunque rette corrispondenti come a_1 e a_2 (Fig. 3).

Le rette b_3 e c_3 , congiungenti punti comuni alle coppie omologhe ed alle secanti, forniscono per intersezione il punto W centro di un fascio prospettivo con i primi due.

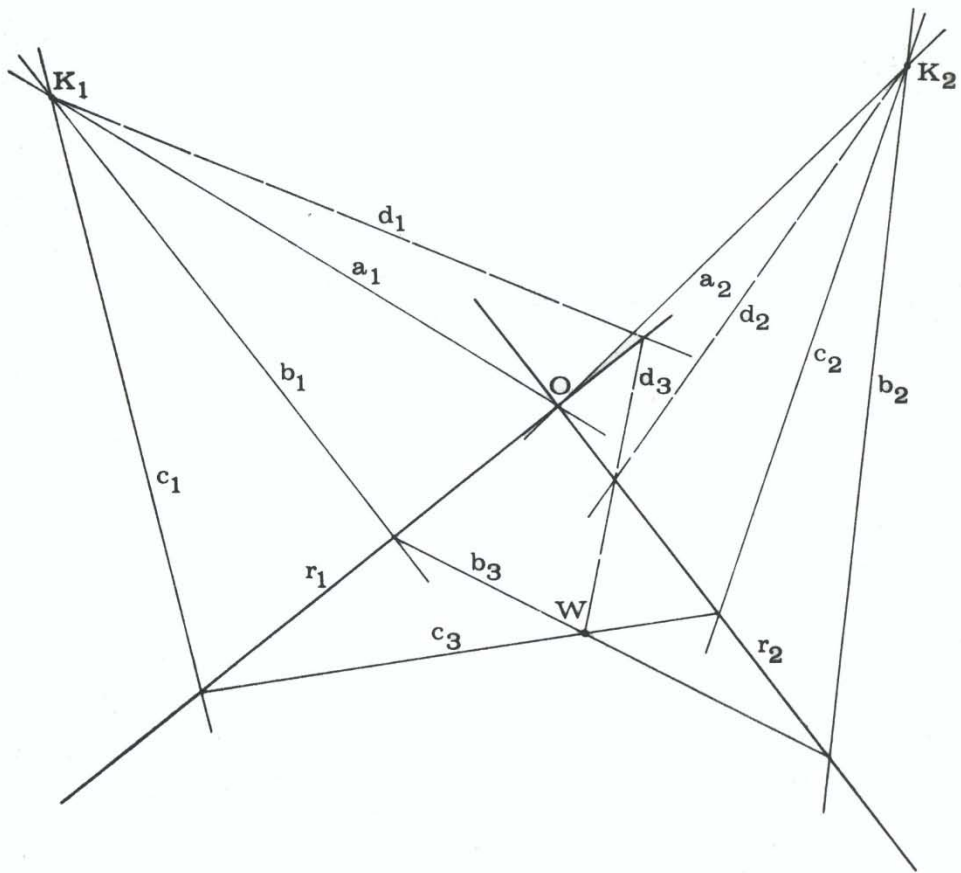
La generica retta d_3 del fascio di centro W , intersecando la r_1 e la r_2 , permette così di tracciare la retta d_2 , nota la d_1 , e viceversa.

Possiamo tuttavia usare come secanti due rette corrispondenti come, ad esempio, a_1 ed a_2 (teorema di Aschieri) ed ottenere ugualmente il centro W di un fascio prospettivo ai primi due (Fig. 4).

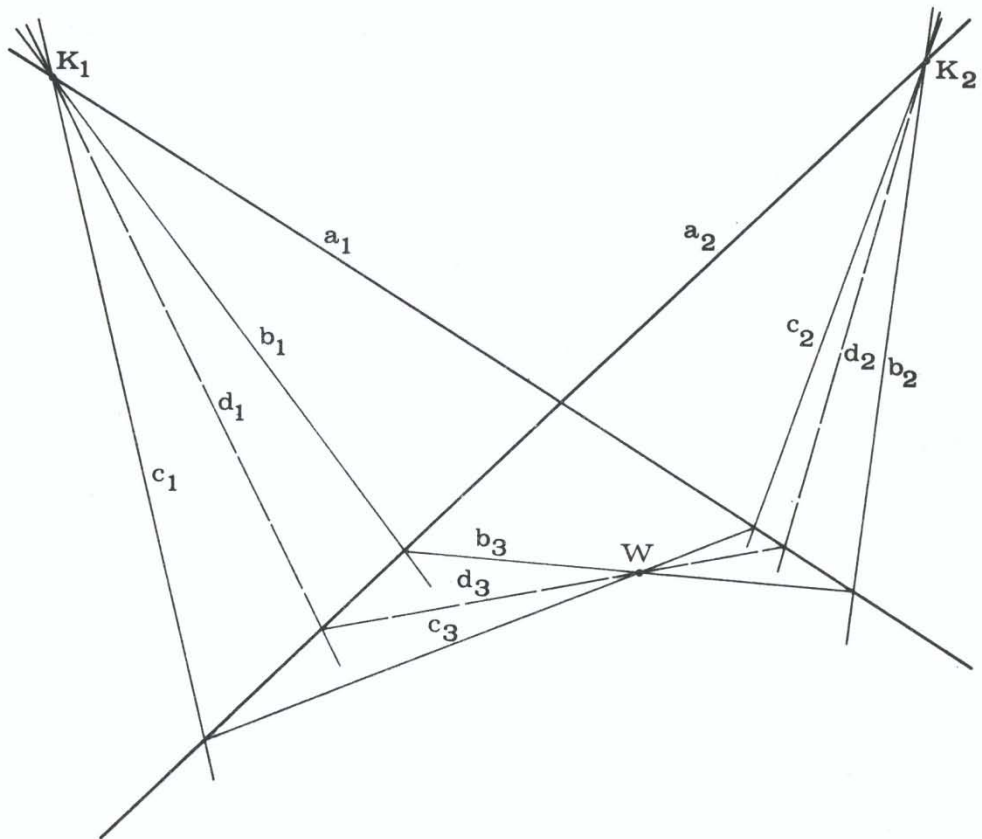
Consideriamo allora il rettangolo $ABCD$ contorno di una immagine planimetrica del terreno da rappresentare, conformato a curve di livello, ed una qualsiasi rappresentazione prospettica di esso come il trapezio $A'B'C'D'$ (Fig. 5).

Il punto E , intersezione delle rette AG e BC , ha come corrispondente il punto E' , intersezione delle rette $A'G'$ e $B'C'$, essendo i segmenti GC e $G'C'$ uguali e paralleli al quadro: in tal modo la retta g per D ed E ha come corrispondente prospettica la g' per D' ed E' .

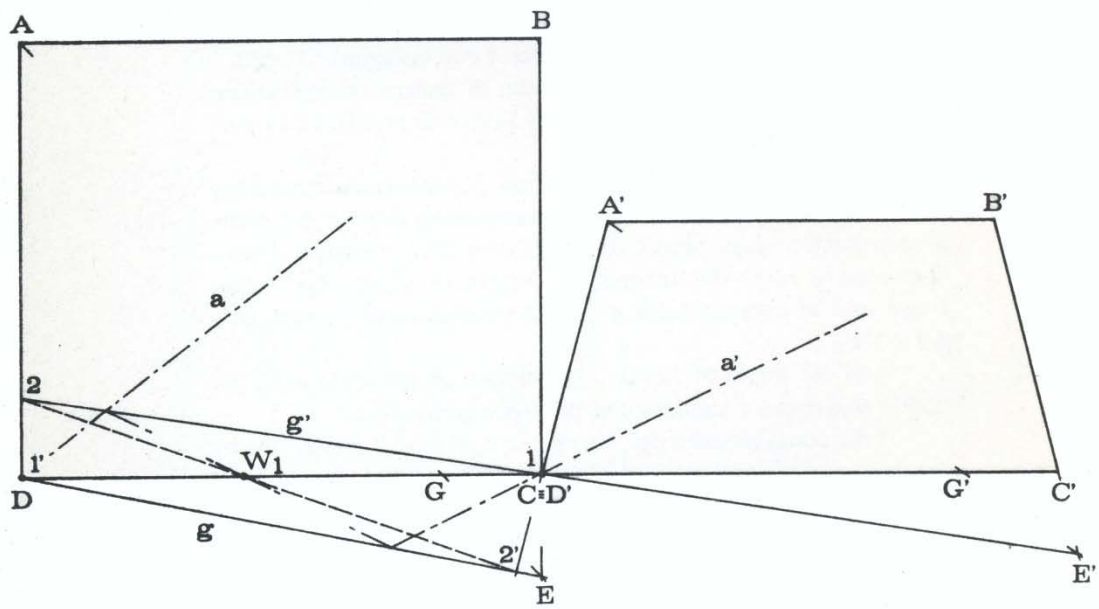
Fissiamo adesso D e D' come centri di due fasci proiettivi, di



F.3



F.4



F.5

cui sono note le coppie di rette corrispondenti $DA D'A'$, $DC D'C'$, $DE D'E'$: in tal caso, le due secanti g ed g' tagliano le altre coppie di rette omologhe rispettivamente nei punti $1,1$ e $2,2$, le cui congiungenti forniscono per intersezione W_1 , centro di un fascio prospettivo con i due assegnati (Fig. 5).

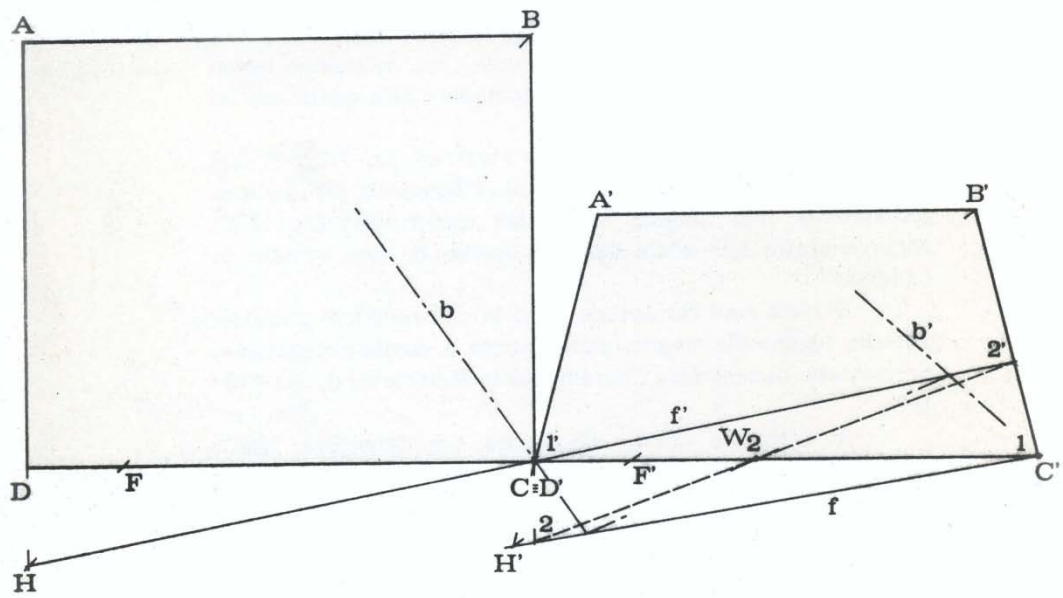
La generica retta a del fascio di centro D avrà allora come corrispondente proiettiva nel fascio di centro D' la retta a' .

Al variare della a nel campo planimetrico compreso tra la DA e la DC , corrisponde la variazione della a' nel campo prospettico compreso tra la $D'A'$ e la $D'C'$, mentre la corrispondente retta del fascio prospettivo di centro W_1 taglia i due assi di prospettività g e g' in punti interni ai segmenti $1,2$ e $1',2'$.

In tal modo si limita al massimo lo spazio operativo, dando chiarezza e snellezza al processo proiettivo.

Se consideriamo poi i punti C e C' come centri di due fasci corrispondenti, di cui siano note le coppie di rette $CB C'B'$, $CD C'D'$, $CH C'H'$, possiamo instaurare una seconda proiettività perfettamente analoga alla prima, nella quale alla generica retta b corrisponde la prospettica b' (Fig. 6).

Così facendo il generico punto planimetrico P , appartenente alle rette a, b ha come omologo il punto prospettico P' appartenente alle rette a', b' (Fig. 7).



F.6

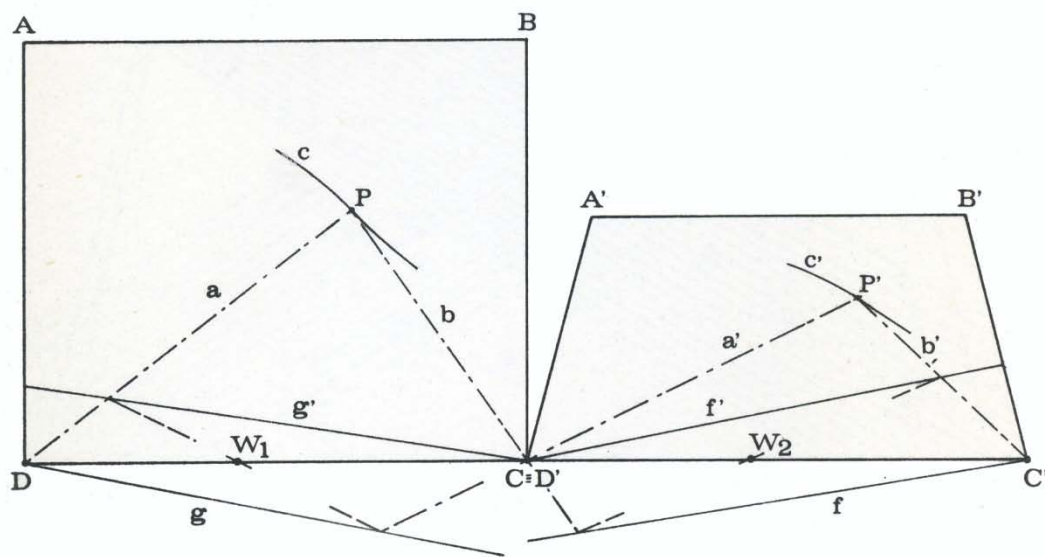
Dovendo rappresentare la superficie orografica mediante curve di livello, occorre poi che ciascun punto necessario al tracciamento prospettico della generica curva, dapprima ritrovato in prospettiva, per via proiettiva, alla quota zero del geometrico, cui ci riferiamo, venga successivamente traslato prospetticamente alla quota che ad esso compete.

A tal fine riportiamo sulle verticali per D' e C' due scale delle quote delle curve di livello riferendoci per il dimensionamento del singolo intervallo unitario al lato D'C' rappresentato, alla scala metrica scelta, in vera grandezza (Fig. 8).

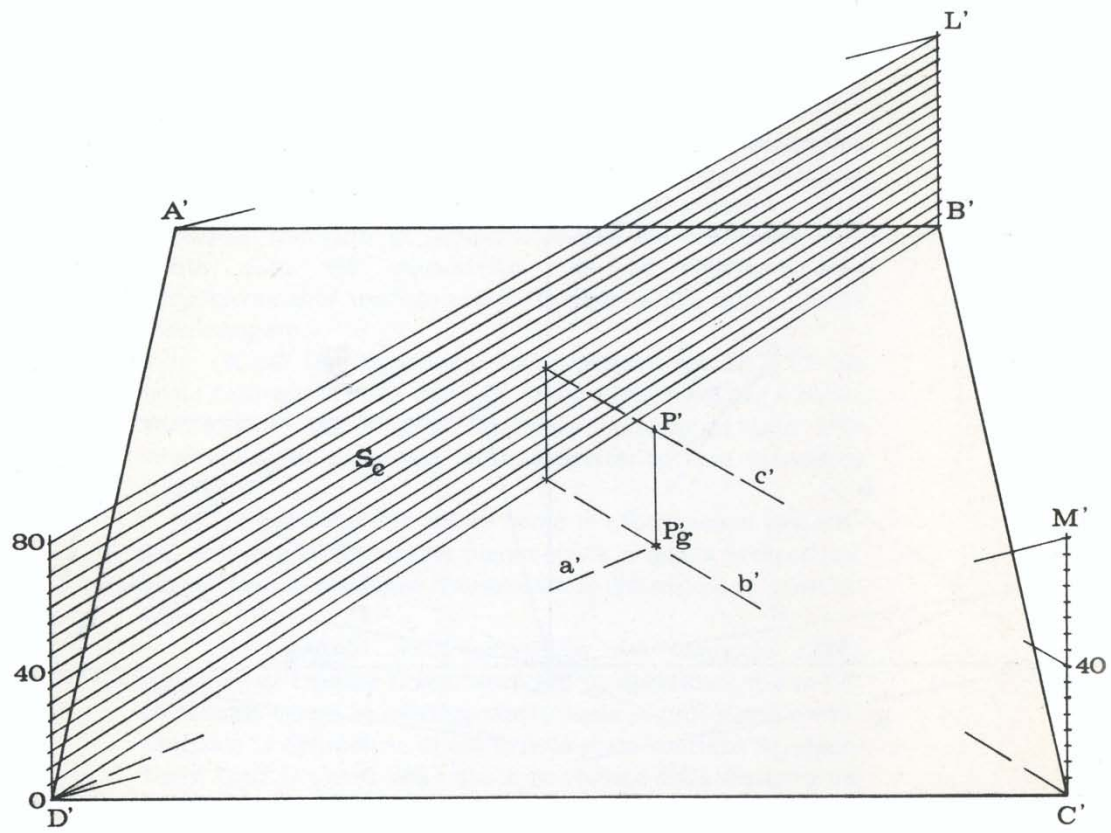
E' bene anzi far notare come le due relazioni proiettive, che legano l'immagine planimetrica a quella prospettica, permettano di scegliere liberamente le dimensioni di quest'ultima.

Il triangolo A'L'B', omotetico del triangolo D'M'C' , permette di traslare il segmento M'C' prospetticamente in L'B', riportando quindi la corrispondente scala in profondità e consentendo la definizione di una grande scala continua Sc, riportante tutti i valori delle quote al variare della distanza del generico punto della curva dal quadro.

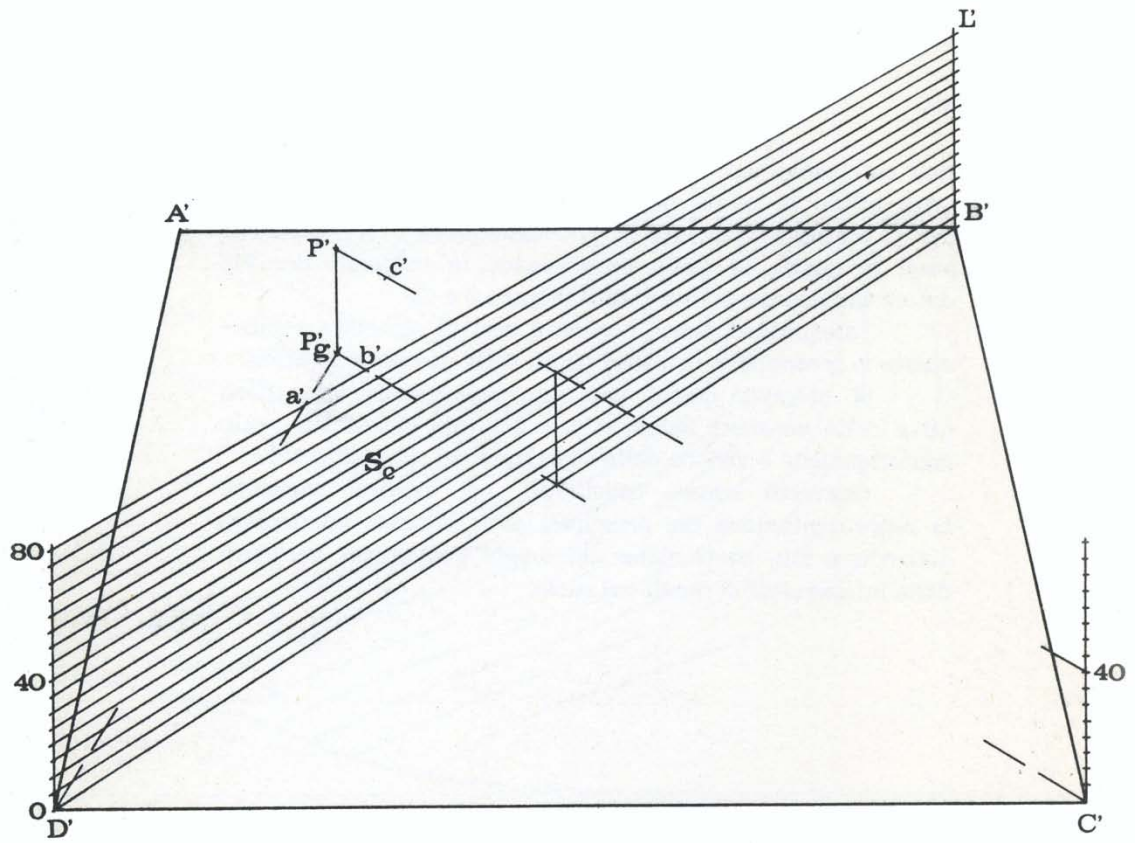
Nota dunque l'immagine prospettica P'g del punto P a quota zero sul geometrico, prolunghiamo la retta b' fino ad



F.7



F.8



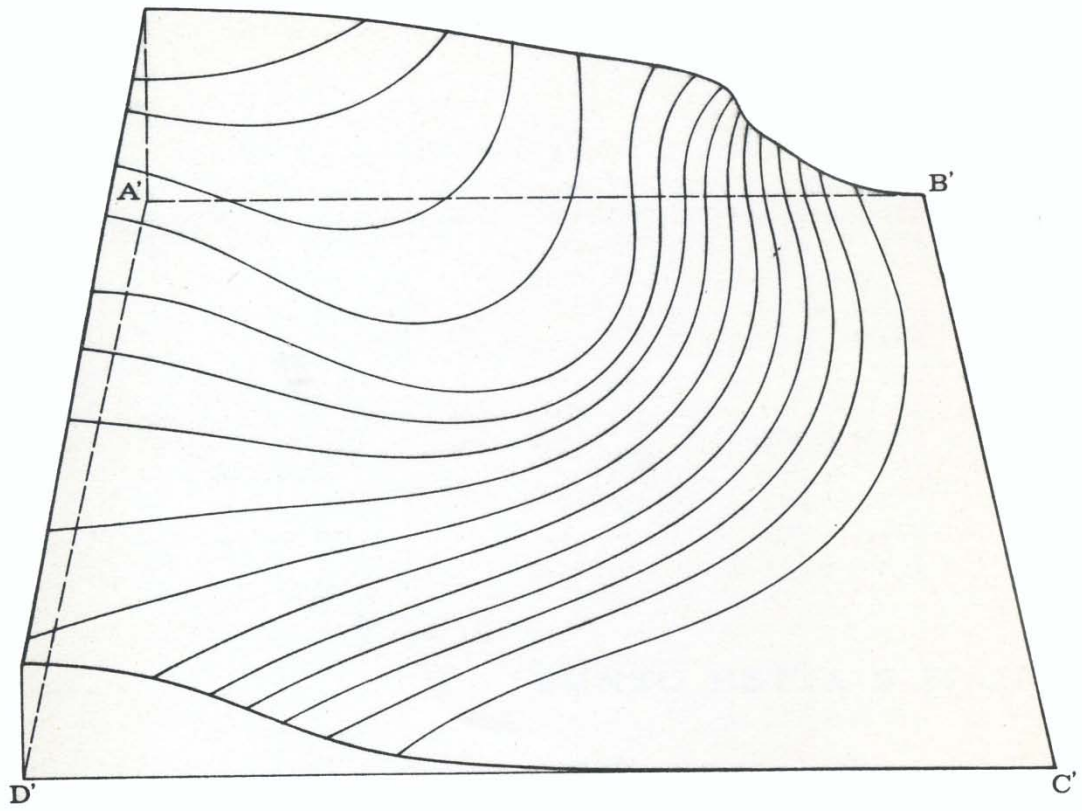
F.9

incontrare la retta a quota zero sulla scala Sc : letta allora la quota del punto sulla Sc e sulla verticale per C' , possiamo tracciare la c' , congiungente i corrispondenti punti in quota, la quale intersecando la verticale per $P'g$ determina la prospettiva P' di P (Figure 8 e 9).

Tale procedimento consente così di riportare rapidamente in prospettiva qualsiasi punto della mappa orografica.

Si propone quindi una rappresentazione scientifica priva delle consuete balze, ritenendola più vicina alla reale conformazione e visione della superficie del suolo (Fig. 10).

Converrà adesso esaminare, nei capitoli seguenti, la rappresentazione dei principali enti, ponendo particolare attenzione alla costruzione dei luoghi geometrici derivanti dalla intersezione di quelli col suolo.



F.10

PUNTO, RETTA E PIANO

Punto, retta e piano

Costruita proiettivamente, secondo quanto già esposto, l'immagine prospettica della proiezione $P'g$ del generico punto P sul geometrale, si voglia riportare prospetticamente il punto alla quota h che gli compete.

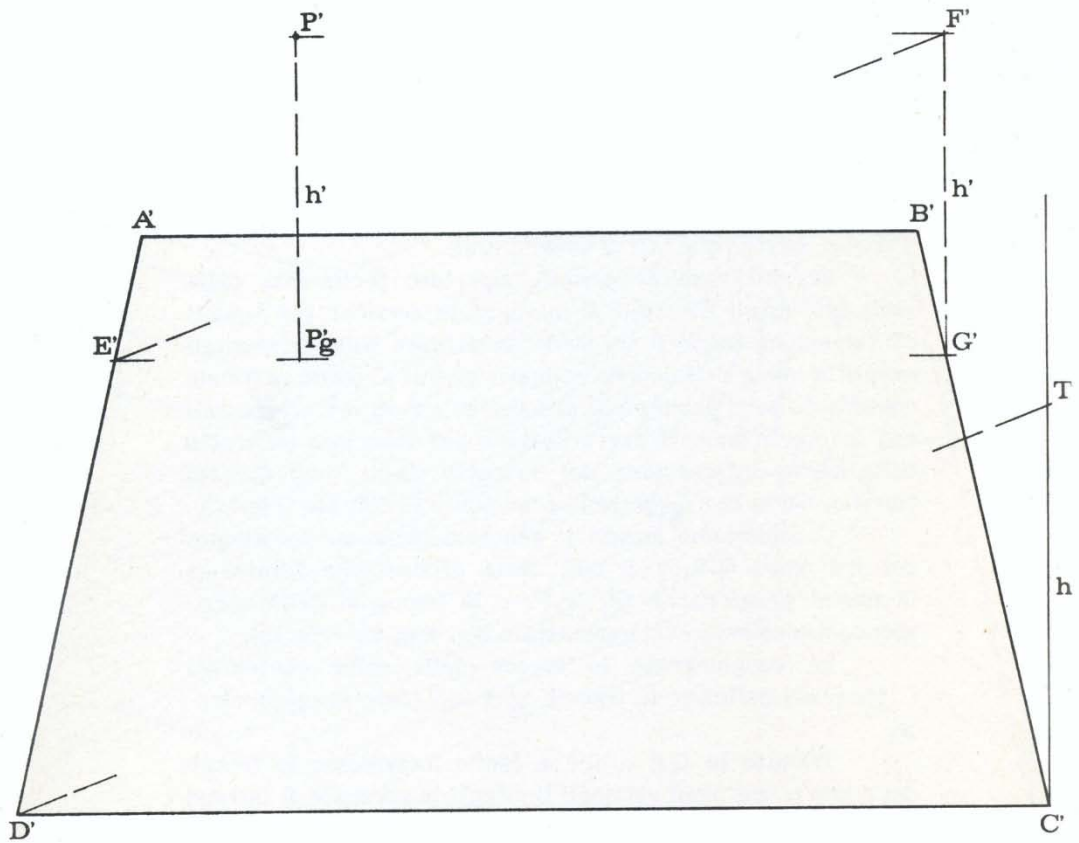
A tal fine, essendo la quota del tutto generica, non è possibile appoggiarsi alla scala Sc ed appare conveniente ricorrere ai triangoli omotetici $D'T'C'$ e $E'F'G'$, contenendo il lato $E'G'$ la proiezione $P'g$.

In tal modo, la quota h del punto, riportata, alla scala metrica scelta, in vera grandezza, individuando il lato $T'C'$ del triangolo, viene riportata omoteticamente in $F'G'$ alla profondità di P , per essere successivamente traslata parallelamente al quadro, e cioè tra due orizzontali, sulla verticale per $P'g$ (Fig. 11).

Per rappresentare la generica retta r occorre poi riportare in prospettiva due qualsiasi punti Q e R di essa: la congiungente le proiezioni prospettiche Q' ed R' definisce, ovviamente, la prospettiva r' di r , mentre la congiungente $Q'g$ ed $R'g$, ne dà la corrispondente proiezione sul geometrale (Fig. 12).

L'intersezione della $Q'R'$ con la $Q'g$ $R'g$ fornisce quindi la traccia della retta sul geometrale.

Per determinare l'immagine P' del punto P intersezione della r col terreno basta considerare la $r'g$ come traccia sul



F.11

geometricale del piano verticale contenente la retta: tale traccia può incidere la scala Sc ed un lato del trapezio $A'B'C'D'$, ovvero due lati di quest'ultimo.

In ogni caso è possibile riportare facilmente dalle scale già note i dislivelli di quota sulle verticali per i punti d'intersezione suddetti, in modo da definire delle orizzontali aventi la quota delle curve ed appartenenti al piano verticale contenente la r : pochi punti di intersezione di tali orizzontali con le corrispondenti curve bastano per tracciare un tratto della curva intersezione del suddetto piano verticale col terreno, curva che incontra la r nel punto P' cercato (Fig. 12).

Consideriamo adesso il generico piano σ individuato dai tre punti Q, R, P , di cui, come prima, sono fornite le immagini prospettiche Q', R', P' , e le immagini delle corrispondenti proiezioni sul geometricale $Q'g, R'g, P'g$ (Fig. 13).

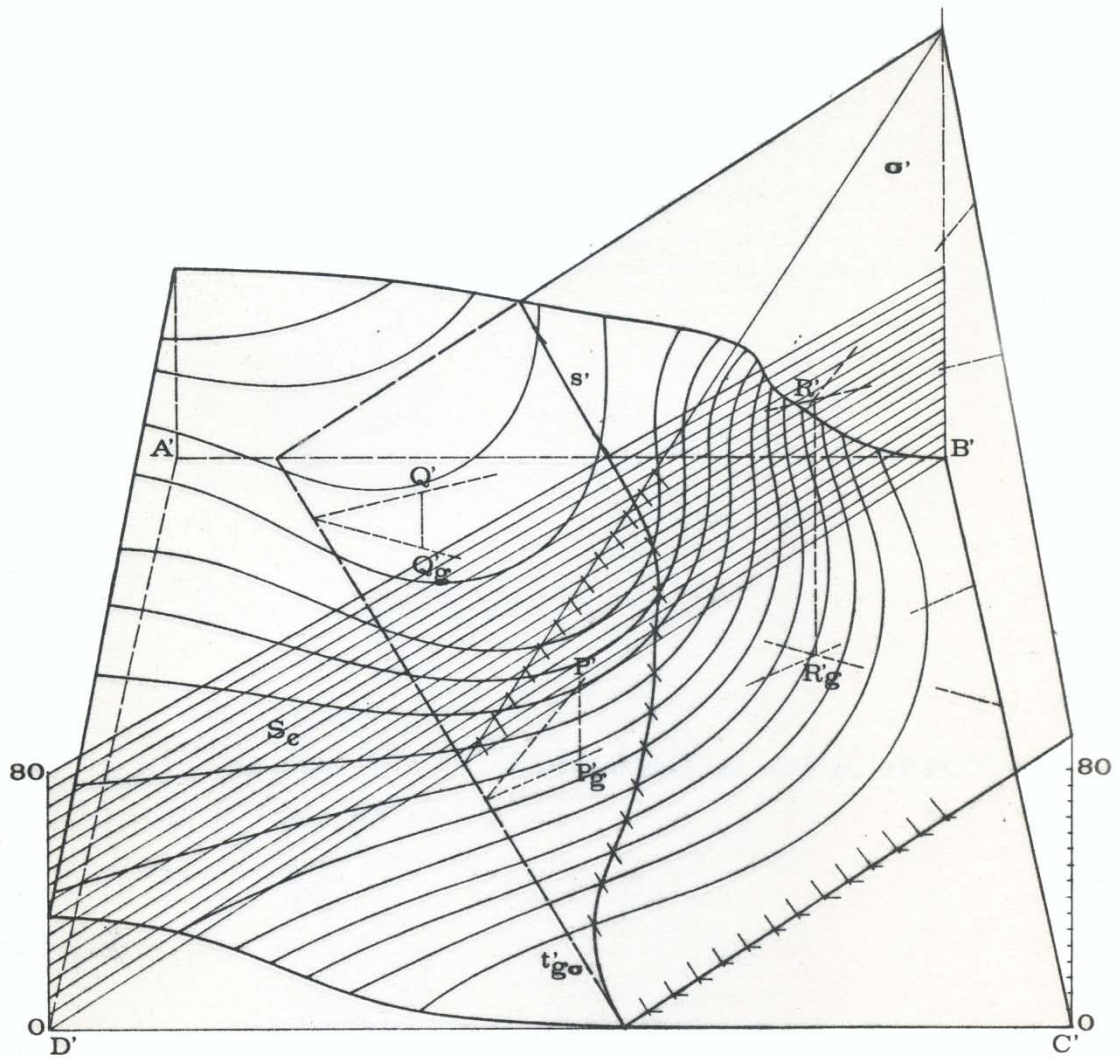
La congiungente le tracce delle rette contenenti i tre punti definisce la traccia $tg\sigma$ del piano sul geometricale.

Tramite le $Q'R$ e $R'P$ è facile individuare le tracce del piano σ sui piani verticali limitanti la porzione di terreno in esame, e quindi la retta intersezione del piano con la scala Sc .

Per mezzo della graduazione fornita su quest'ultima retta dalla Sc e di quella facilmente tracciabile su una

delle suddette rette traccia, tramite orizzontali appoggiate alle scale esistenti, è possibile tracciare le orizzontali di σ appartenenti ai piani di livello.

Tali rette incontrano quindi le curve di livello corrispondenti in punti della curva s' , intersezione del piano σ col terreno (Fig. 13).



F.13

CONICHE E QUADRICHE

Coniche e quadriche

Per rappresentare le coniche, occorre riportare in prospettiva due qualsiasi elementi coniugati di esse, corde, diametri o assi.

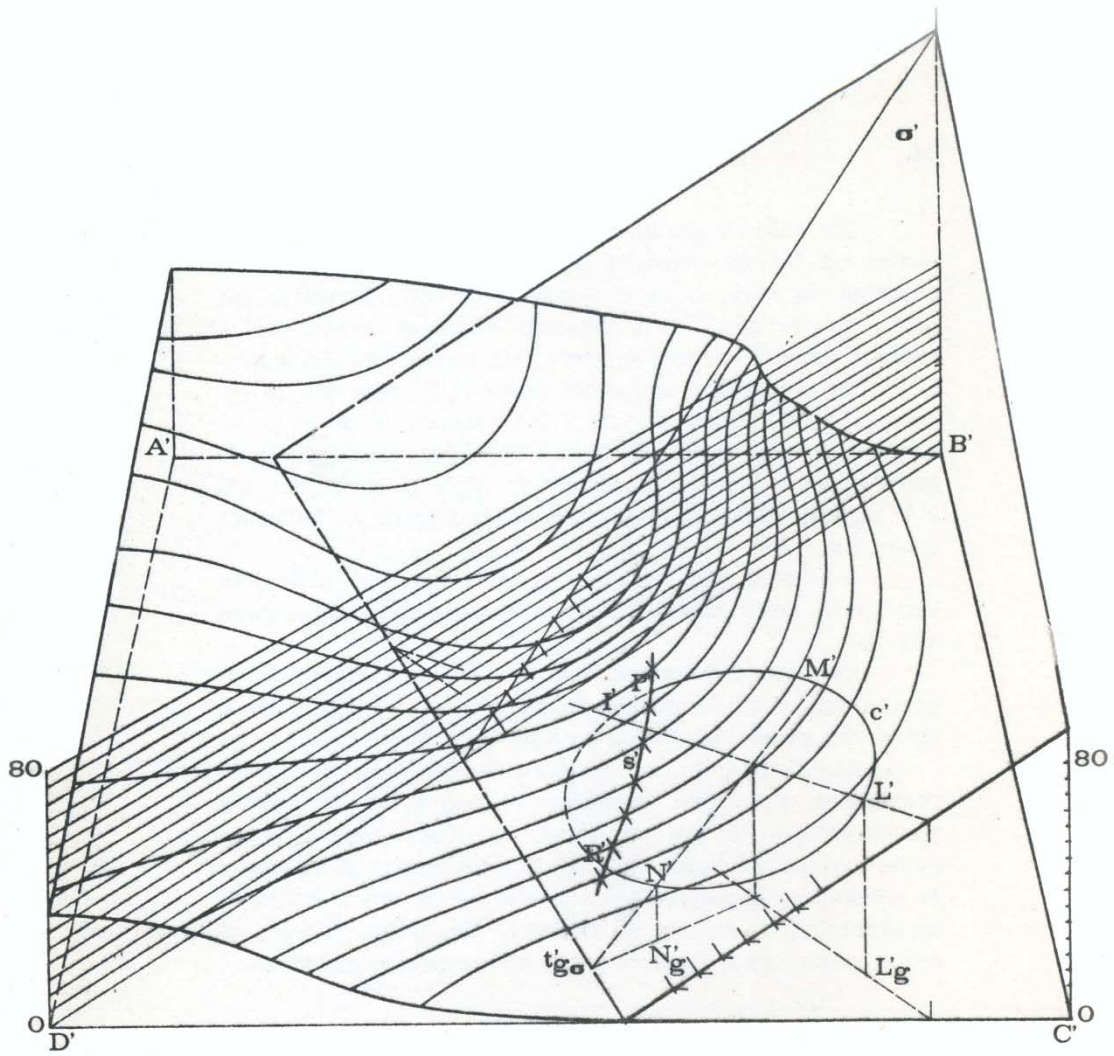
Tali elementi rimangono coniugati nell'immagine prospettica, diventando il più delle volte corde sufficienti a definire la conica prospettica.

Riportati allora in prospettiva gli estremi I,L ed M,N di due elementi coniugati della generica conica c (Fig. 14), si ottengono gli elementi I'L' ed M'N', anch'essi coniugati, della generica conica c' , immagine della c , che diviene così immediatamente tracciabile (nota I).

Per determinare poi l'intersezione della conica c' col terreno, occorre individuare, secondo quanto precedentemente esposto, un tratto della curva s' intersezione del piano σ contenente la conica con la superficie del suolo: la s' interseca, infatti, la conica nei punti P' ed R' cercati (Fig. 14).

Rivolgiamoci adesso alla rappresentazione delle superfici quadriche ponendo, inizialmente, la nostra attenzione ai coni e ai cilindri (quadriche specializzate).

Per disegnare il generico cono in prospettiva basta riportare il centro V e una qualsiasi conica direttrice c : le tangenti mandate dall'immagine V' di V all'immagine c' di c completano il contorno apparente del cono (Fig. 15).



F.14

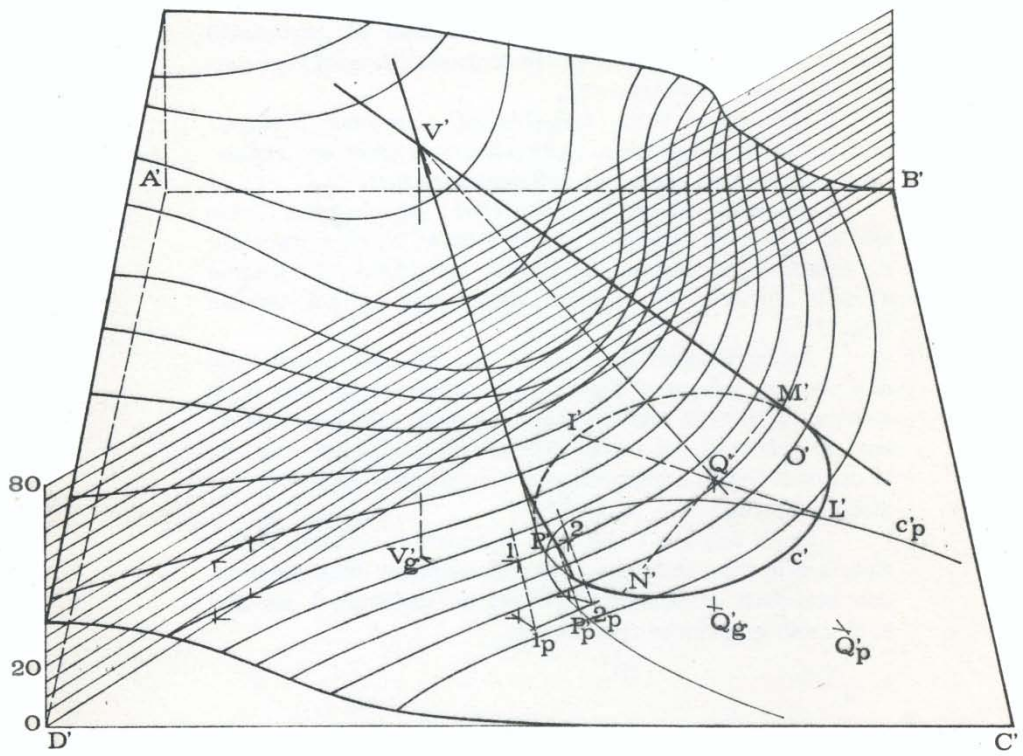
Per definire poi la curva intersezione della superficie conica col terreno conviene proiettare da V sul geometrale dapprima la curva c in $c'p$, quindi, di volta in volta, per punti, un trattino 1-2 di ciascuna curva di livello che si intuisce debba contenere un punto dell'intersezione richiesta.

La proiezione $1p-2p$ del tratto 1-2 interseca la $c'p$ nel punto $P'p$, proiezione da V sul geometrale di un punto comune sia alla curva di livello che alla conica di egual quota (conica proiettata sempre in $c'p$): la retta per $P'p$ e V taglierà allora il tratto 1-2 nell'immagine P' del punto P cercato.

Ripetendo l'operazione è possibile trovare facilmente vari punti della curva intersezione appoggiandosi sempre alla $c'p$.

La rappresentazione del cilindro può ricondursi a quella del cono, considerando il vertice V all'infinito e riportando generalmente due coniche direttrici.

Se il cilindro ha generatrici verticali, queste in prospettiva rimangono parallele e, quindi, di immediato tracciamento (Fig. 16); viceversa, le stesse fuggono in un punto lontano dai limiti del foglio: in tal caso, o si tracciano le generatrici appoggiandosi a quelle contenenti il contorno apparente, per mezzo di triangoli omotetici, ovvero si segue quanto ora si esporrà per le altre superfici quadriche.



F. 15

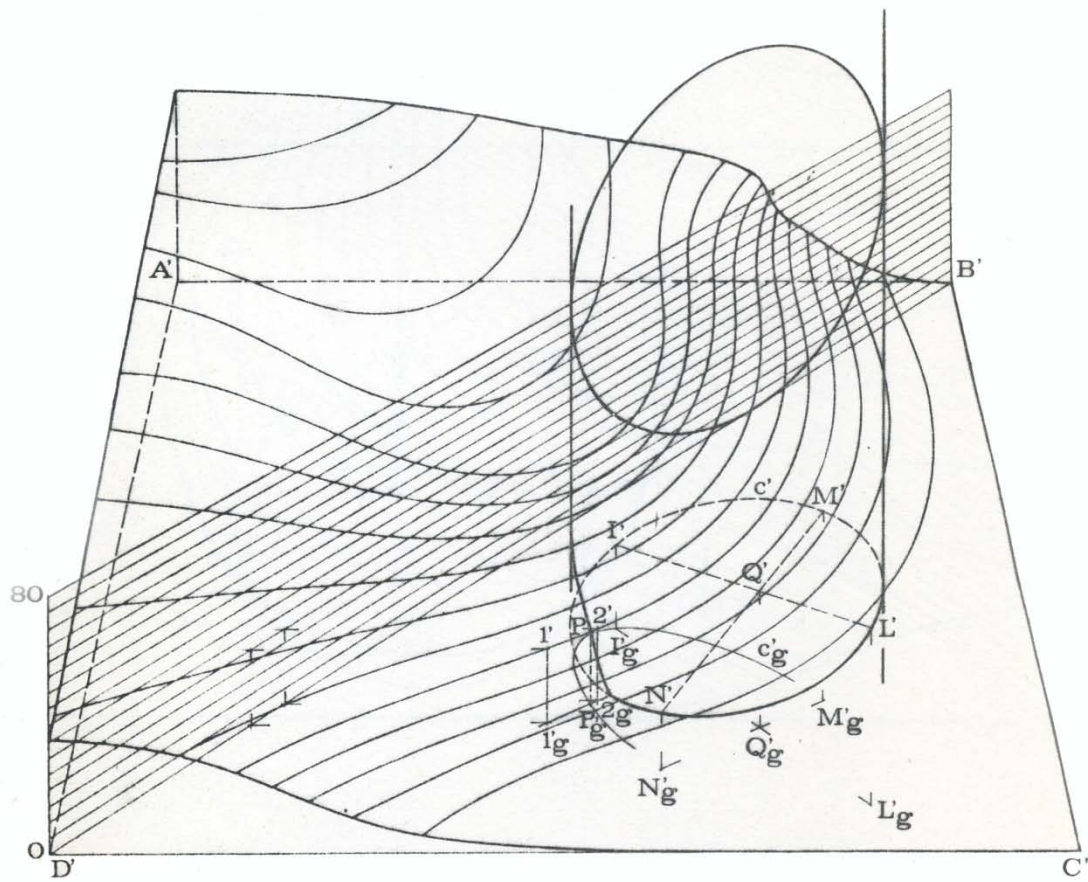
Per rappresentare le superfici quadriche a punti ellittici ed iperbolici (ellissoidi, paraboloidi ed iperboloidi) basta riportare in prospettiva tre qualsiasi elementi coniugati di esse, corde, diametri o assi.

Ancora una volta tali elementi rimangono coniugati nell'immagine prospettica, permettendo di tracciare rapidamente il contorno apparente della quadrica (nota 2).

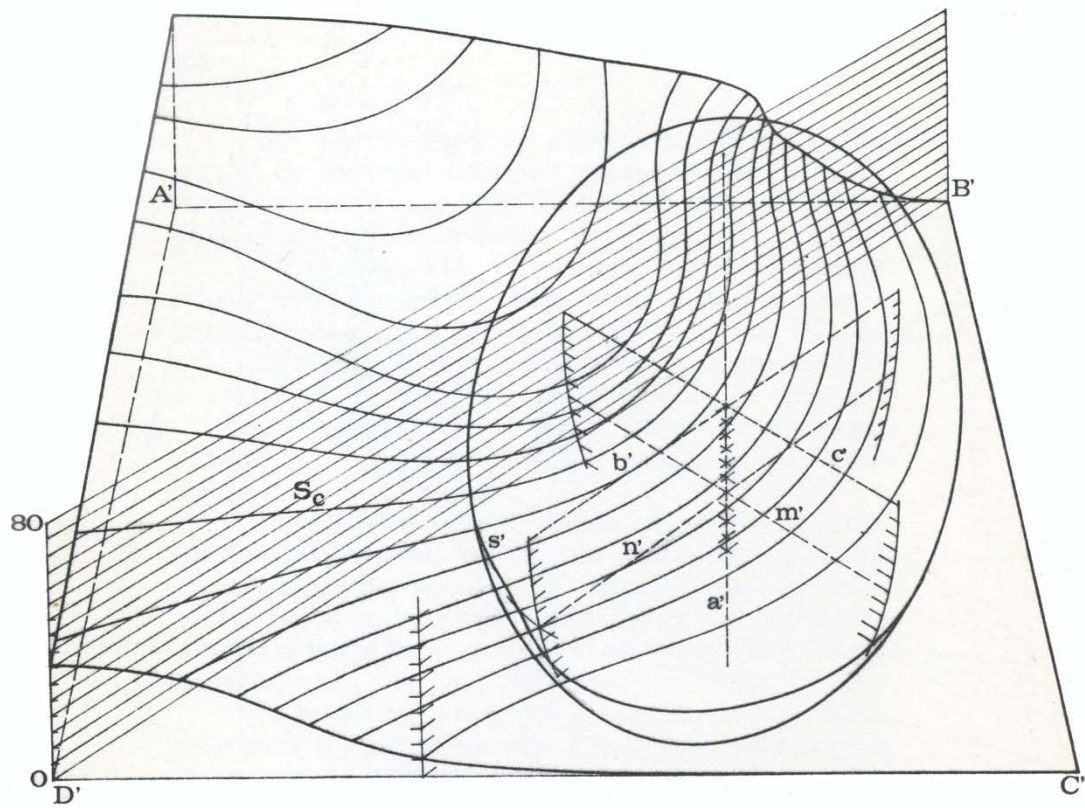
Riportati allora in prospettiva, ad esempio, i tre assi a , b , c di un ellissoide generico (in a' , b' , c') e tracciato il contorno apparente, si voglia individuare l'immagine s' della curva s intersezione della quadrica col terreno (Fig. 17).

Appoggiandosi alla scala Sc , si individuino sulle due coniche principali verticali gli estremi degli assi delle coniche di livello: definiti tali elementi, come m' ed n' , basterà tracciare un tratto di ciascuna conica per tagliare la curva di livello corrispondente in punti della curva intersezione richiesta.

Se gli assi b e c non sono orizzontali, occorre, infine, riportare in prospettiva tre elementi coniugati della quadrica, due dei quali orizzontali, in modo da sostituire i tre assi a , b , c nell'applicazione del metodo.



F. 16



F. 17

NOTE

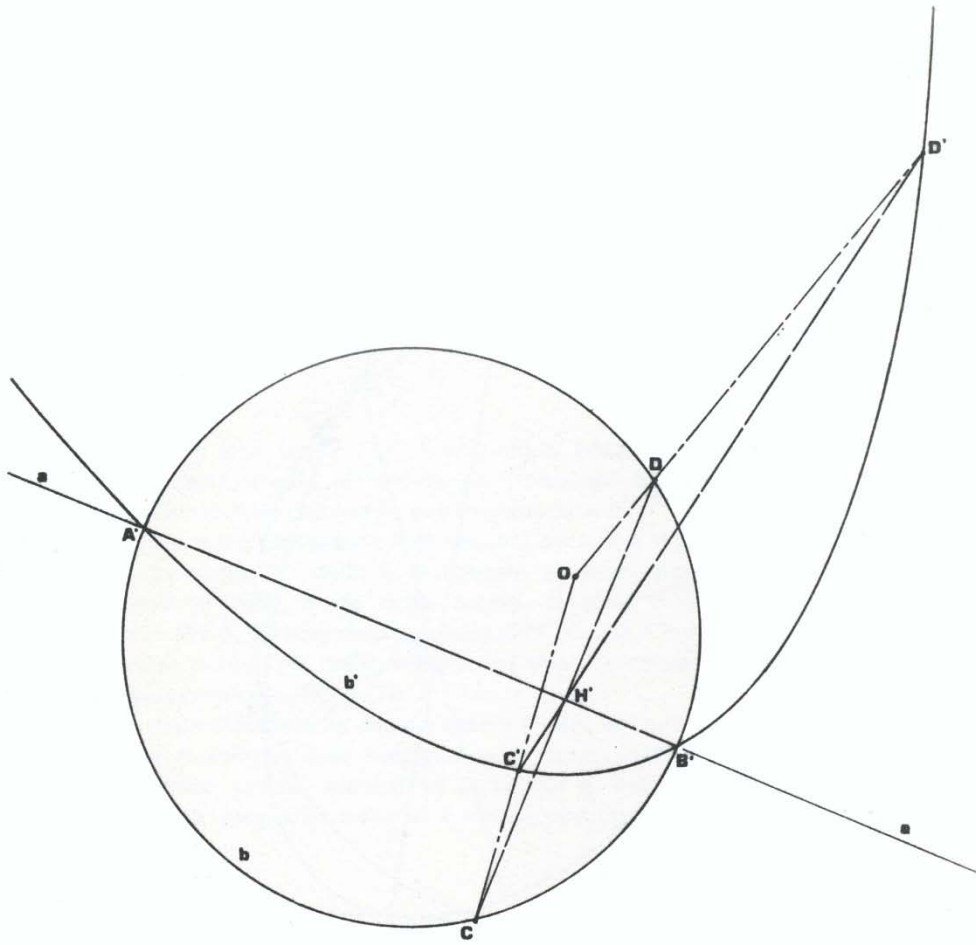
Nota 1

Note due corde $A'B'$ e $C'D'$ della generica conica b' , coniugate fra loro, si costruisca la circonferenza b omologa della b' , avente per diametro una qualsiasi delle due corde, per esempio la $A'B'$.

La retta contenente $A'B'$ assume, pertanto, il ruolo di asse a dell'omologia e la corda CD della b ortogonale al detto asse e contenente H' , punto intersezione delle corde della conica, essendo coniugata al diametro $A'B'$ rispetto alla b , diviene omologa della $C'D'$, sicché è immediato individuare il centro proprio O dell'omologia nel punto intersezione delle congiungenti le coppie omologhe CC' e DD' .

Tale omologia ha dunque asse e centro al finito (come era da attendersi vista la asimmetria della configurazione rispetto all'asse a).

Nelle tavole seguenti (F.18, 19, 20) si sottolinea la generalità della costruzione eseguibile, come si è detto, per tutte le coniche (ellisse, parabola, iperbole).



F. 19

Se le corde CD e $C'D'$ appartengono alla stessa retta m , occorre individuare il centro proprio O dell'omologia, che giace, ovviamente, sulla m , ricorrendo al ribaltamento sul piano dell'omologia σ del piano contenente CD e ortogonale a σ : immaginiamo, infatti, che l'omologia nasca dalla proiezione della prospettività fra la circonferenza di diametro $A'B'$, disposta sul piano contenente l'asse a e ortogonale a σ , e la conica b' giacente su quest'ultimo, secondo un centro di proiezione improprio a 45° . Basta allora ruotare la corda CD intorno ad H' portandola in C^*D^* , per ottenere il ribaltamento della corda prospettica della $C'D'$, di modo che, conducendo la $D'D^*$ e la $C'C^*$, si possa trovare nell'intersezione di esse il centro O^* della prospettività ribaltato che, proiettato sulla m secondo il centro di proiezione suddetto ribaltato, fornisce il centro d'omologia O cercato (F. 21).

Nota 2

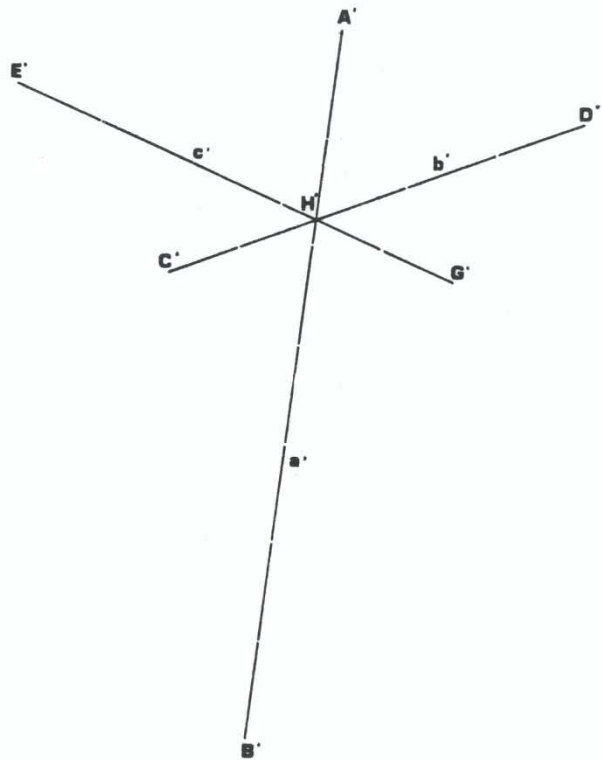
In prospettiva il contorno di una qualsiasi quadrica è una conica, trattandosi della proiezione sul quadro dal punto di vista V della conica polare di V rispetto alla quadrica: esso sarà un'ellisse, una parabola o un'iperbole secondo che la polare suddetta sia esterna, tangente o secante il piano limite (piano per V parallelo al quadro).

Supponiamo, ad esempio, di aver riportato in prospettiva i tre assi a, b, c di un ellissoide comunque disposto nello spazio (Fig. 22).

Si considerino, ad esempio, a' e b' , prospettiva di a e b , corde coniugate nella ellisse proiezione corrispondente e , senza costruire quest'ultima, si determini la corda $R'S'$ giacente sul piano \mathbf{n} proiettante il terzo asse c , nonché il polo P' ad essa corrispondente (Fig. 23): a tal fine ci si serva dell'omologia ad asse e centro propri instaurabile tra l'ellisse suddetta e la circonferenza avente per diametro a' o b' .

Le corde $R'S'$ e c' sono prospettiva degli assi dell'ellisse sezione q giacente su \mathbf{n} , mentre in P' , proiezione del polo di \mathbf{n} rispetto alla quadrica, fugano le tangenti all'ellissoide nei punti della q coniugati ad \mathbf{n} .

Le due fuganti in P' contenenti gli estremi T_1 e T_2 della proiezione q' della q , sono tangenti nei punti suddetti



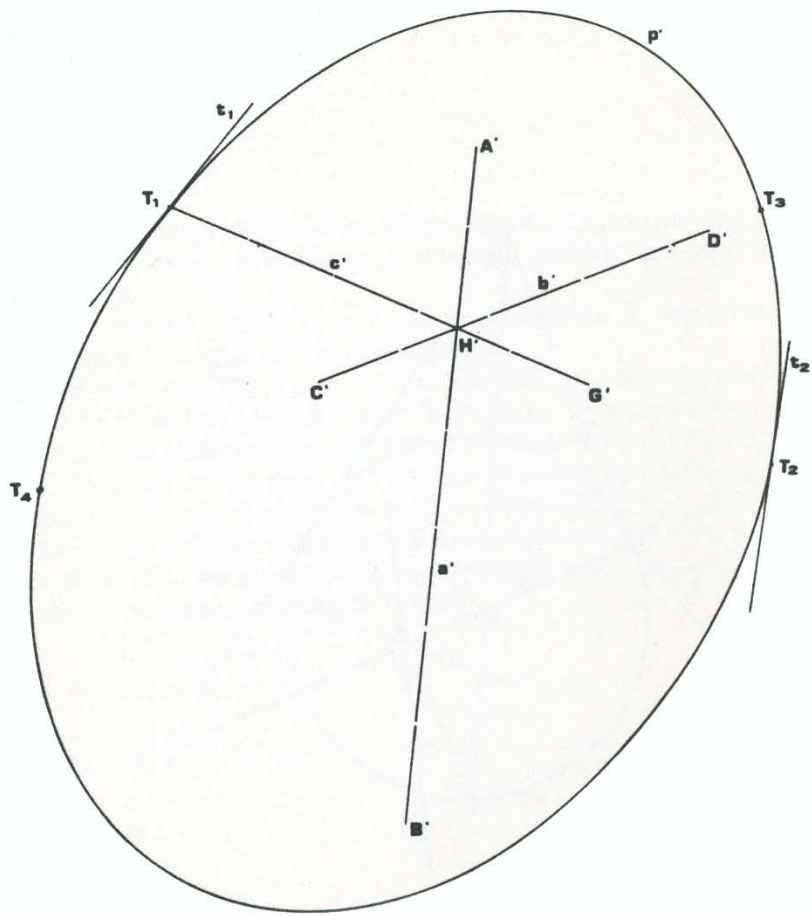
F. 22

la conica p' , prospettiva dell'ellissoide, in quanto rette contorno apparente del cilindro tangente nella conica q la quadrica.

Per trovare i punti T_1 e T_2 basta considerare le due corde coniugate $R'S'$ e c' della q' ed applicare la nota omologia.

In tal caso, alla corda $R'S'$ corrisponde la corda RS perpendicolare per H' alla c' : le tangenti dal centro di omologia O la circonferenza, dovendo tangere pure la q' , individuano sull'asse di omologia c' i punti T_1 e T_2 richiesti.

Tracciate dunque per T_1 e T_2 le due rette t_1 e t_2 contenenti P' , occorre ripetere quanto esposto, prendendo in considerazione, stavolta, ad esempio, le corde a' e c' , in modo da ricavare almeno un altro punto della conica contorno, di guisa che essa (essendo noti così tre punti e due tangenti in essi) risulti definita e rapidamente tracciabile (Fig. 24).



F.24

BIBLIOGRAFIA

R. FILOSTO, Assonometria per ribaltamento, Ed. Palma, Palermo 1963.

G. DE FIORE, M. DOCCI, C. JANNICCARI, A. PASCUCCI, Teoria della rappresentazione architettonica, Facoltà di Architettura, Roma, 1964.

R. DE RUBERTIS, Nota sulle proiezioni assonometriche, Facoltà di Architettura, Roma, 1967.

R. FILOSTO, Lineamenti teorici del disegno, I.L.A. Palma, Palermo, Sao Paulo, 1968.

V. CAPITANO, Applicazioni di Geometria Proiettiva e Descrittiva al disegno delle forme geometriche elementari, I.L.A. Palma, Palermo, Sao Paulo, 1972.

O. CIISINI, G. MASOTTI, Lezioni di geometria descrittiva, Tamburini Editrice, Milano, 1975.

M. INZERILLO, Lezioni di Applicazioni di Geometria Descrittiva, CO.Gra.S., Palermo, 1977.

U. SACCARDI, Applicazioni di Geometria Descrittiva, Libreria Editrice Fiorentina, Firenze, 1977.

V. CAPITANO, Ipotesi sul segno, quad. n°16, Ist. di disegno

Facoltà di Ingegneria, Palermo, 1978.

A. SGROSSO, A. VENTRE, Elementi di geometria proiettiva e di geometria descrittiva, Massimo, Napoli, 1979.

C.CUNDARI, Fotogrammetria architettonica, Ed. Kappa, Roma, 1983.

G. M. CATALANO, Prospettiva sferica, Co.Gra.S., Palermo, 1986.

G. M. CATALANO, Prospettiva delle quadriche, Co.Gra.S., Palermo, 1987.

M. DOCCI, D. MAESTRI, Il rilevamento architettonico, Editori Laterza, Bari, 1987.

INDICE

5 PRESENTAZIONE

7 INTRODUZIONE

11 Superficie orografica

25 Punto, retta e piano

33 Coniche e quadriche

41 NOTE

53 BIBLIOGRAFIA